Devoir surveillé de mathématiques n°7 **21 mars 2014** **1ère S**

Nom:

Exercice 1 : (3)

On considère la suite u_n définie par $u_0=1$ et pour $n\geqslant 0$: $u_{n+1}=u_n+2n-3$

1°) Montrer que $u_3=-2$.

2°) Démontrer que cette suite est croissante à partir d'un rang que l'on précisera..

Exercice 2 : (6)

1°) Étudier le sens de variation de la suite (u_n) définie pour $n\geqslant 2$ par $u_n=\dfrac{2n}{n-1}$

2°) Étudier le sens de variation de la suite (v_n) définie pour tout n de ℕ par

$$v_n=7-2\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

3°) $(w_n)_{n\geqslant 1}$ est la suite de terme général $w_n=\dfrac{2\times 0{,}5^n}{n}$.

a- Calculer $\dfrac{w_{n+1}}{w_n}$ b- En déduire le sens de variation de (w_n)

Exercice 3 : (2,5)

1°) On considère l'algorithme suivant :

```
Initialisation :   Affecter à N la valeur 0
                   Affecter à W la valeur 50
Traitement :    Tant que W<1000 faire
                      N prend la valeur N+1
                      W prend la valeur  3W+2N+1
                Fin du Tant que
Sortie :        Afficher N
```

Appliquer cet algorithme en complétant autant que nécessaire le tableau suivant :

Initialisation	Etape 1	Etape 2	....	....		Sortie
N=						
W=						

2°) Dans l'algorithme précédent, W représente les différents termes d'une suite. Parmi les relations de récurrence données ci-dessous, laquelle (ou lesquelles) correspondent à cette suite W ? (on ne demande pas de justifier)

a) $w_{n+1}=3w_n+2(n+1)+1$ b) $w_{n+1}=3w_n+2n+1$ c) $w_n=3w_{n-1}+2n+1$

Exercice 4 : (3,5)

On considère la suite u_n définie par son premier terme $u_0=1$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=4-\dfrac{2}{3}u_n$

1°) Déterminer la fonction *f* vérifiant $u_{n+1}=f(u_n)$

2°) Sur votre copie, construire la représentation graphique de la fonction *f* ainsi que la droite d'équation $y=x$.

3°) Sans calcul, construire sur l'axe des abscisses les termes d'indices 1 à 3 de cette suite(laisser les traits de construction).

4°) Quelle valeur aurait-il fallu donner au premier terme u_0 pour que cette suite soit constante ? **On demande une valeur exacte**.

Exercice 5 : (2,5)

Le nombre d'abonnés à une revue était la première année de 5000. Chaque année, 30 % des abonnés ne renouvellent pas leur abonnement mais on compte parallèlement 500 nouveaux abonnés. On note (u_n) le nombre d'abonné la $n^{\text{ième}}$ année.

1°) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n

2°) A l'aide de la calculatrice, déterminer u_{10}

3°) A l'aide de la calculatrice, déterminer si la suite est convergente ou divergente et conjecturer son éventuelle limite.

Exercice 6 : (2,5)

On considère la suite u_n définie par récurrence par $u_{n+1}=\dfrac{u_n+1}{u_n-1}$ et dont le premier terme est $u_0=10$.

1°) Prouver que quel que soit l'entier n de ℕ, on a $u_{n+2}=u_n$.

2°) Déterminer les différents termes de cette suite.

Correction du DS n°7 — 21/03/2014 — 1ère S

Exercice 1 :

On considère la suite u_n définie par $u_0=1$ et pour $n\geqslant 0$: $u_{n+1}=u_n+2n-3$

1°) Calculer u_1, u_2, u_3.

$u_1=u_{0+1}=u_0+2\times 0-3=1+0-3=-2$

$u_2=u_{1+1}=u_1+2\times 1-3=-2+2-3=-3$

$u_3=u_{2+1}=u_2+2\times 2-3=-3+4-3=-2$

2°) $u_{n+1}-u_n=u_n+2n-3-u_n=2n-3$

Or $2n-3>0 \Leftrightarrow n>\frac{3}{2}=1{,}5$ donc cette suite est croissante à partir du rang 2.

Exercice 2 :

1°) $u_{n+1}-u_n=\frac{2(n+1)}{n+1-n}-\frac{2\text{n}}{n-1}=\frac{2n+2}{n}-\frac{2n}{n-1}$

$$=\frac{(2n+2)(n-1)-2n\times n}{n(n-1)}=\frac{2n^2-2n+2n-2-2n^2}{n(n-1)}=\frac{-2}{n(n-1)}$$

Le numérateur est négatif, le dénominateur positif (car c'est un produit de deux positifs)

$u_{n+1}-u_n$ est donc négatif, et (u_n) est décroissante.

2°) $v_{n+1}-v_n=7-2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-\left(7-2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right)=-2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}+2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$

$$=-2\times\left(\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n}+2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\left[-2\times\frac{1}{3}+2\right]=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\times\left(\frac{4}{3}\right)$$

Or $\left(\frac{1}{3}\right)^{n}>0$ et $\frac{4}{3}>0$

Donc $u_{n+1}-u_n>0$ et (u_n) est strictement croissante.

3°) $w_n=\frac{2\times 0{,}5^n}{n}$. (w_n) est une suite de termes strictement positifs.

a- $\frac{w_{n+1}}{w_n}=\frac{2\times 0{,}5^{n+1}}{n+1}\times\frac{n}{2\times 0{,}5^n}=\frac{n\times 0{,}5}{n+1}$

b- Comme (w_n) est une suite de termes strictement positifs, il faut comparer $\frac{w_{n+1}}{w_n}$ à 1.

$\frac{n\times 0{,}5}{n+1}-1=\frac{0{,}5n-n-1}{n+1}=\frac{-0{,}5n-1}{n+1}$

Or n>0 donc le numérateur est négatif et le dénominateur est positif.

On en déduit que $\frac{w_{n+1}}{w_n}-1<0 \Leftrightarrow \frac{w_{n+1}}{w_n}-1<0$ donc (w_n) est décroissante.

Exercice 3 : (2,5)

1°)

Initialisation	Etape 1	Etape 2	Etape 3			Sortie
N=0	N=1	N=2	N=3			N=3
W=50	153	464	1399			

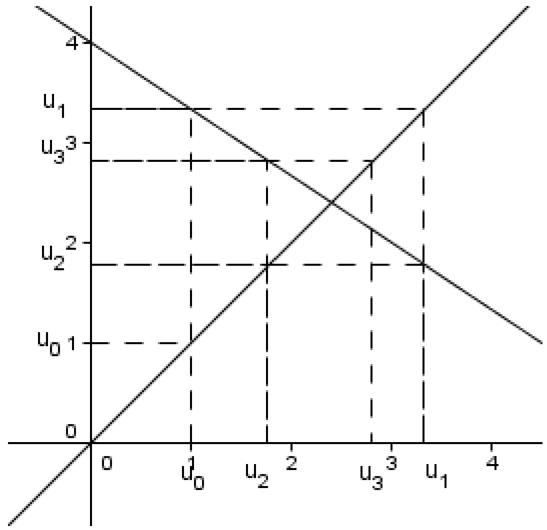
2°) Réponses a) et c)

Exercice 4 :

On considère la suite u_n définie par son premier $u_0=-1$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=4-\frac{2}{3}u_n$

1°) $f(x)=4-\frac{2}{3}x$

2°) et 3)°



4°) Pour que la suite soit constante, il aurait fallu donner comme premier terme de la suite l'abscisse du point d'intersection des droites (à calculer) ou alors, il aurait fallu que $u_{n+1}=u_n \Leftrightarrow 4-\frac{2}{3}u_n=u_n \Leftrightarrow -\frac{2}{3}u_n-u_n=-4$

$\Leftrightarrow \frac{-5}{3}u_n=-4 \Leftrightarrow u_n=\frac{-4}{\frac{-5}{3}}=-4\times\frac{-3}{5}=\frac{12}{5}=2{,}4$. Soit $u_0=u_n=2{,}4$.

<u>Exercice 5 :</u>

1°) $u_1=5000$; $u_{n+1}=0{,}7u_n+500$

2°) $u_{10} \approx 1801{,}2$

3°) Cette suite semble convergente vers 1666,7.

<u>Exercice 6 :</u>

On considère la suite u_n définie par récurrence par $u_{n+1}=\frac{u_n+1}{u_n-1}$ et dont le premier terme est $u_0=10$.

1°) $u_{n+2}=\frac{u_{n+1}+1}{u_{n+1}-1}=\frac{\frac{u_n+1}{u_n-1}+1}{\frac{u_n+1}{u_n-1}-1} = \frac{2\mathrm{u}_n}{u_n-1}\times\frac{u_n-1}{2}=u_n$

2°) On peut en déduire que cette suite n'a que deux valeurs différentes $u_0=10$ et $u_1=\frac{11}{9}$ (puisque $u_2=u_4=u_6=\ldots=u_0=10$ et $u_1=u_3=\ldots=\frac{11}{9}$.