Devoir surveillé de mathématiques n°1 **septembre 2010** | **1ère S**

Exercice 1 : (4,5 points)

1°) On considère la fonction *f* définie par $f(x)=\sqrt{(2x+3)(6-3x)}$

Déterminer le domaine de définition de *f*

2°) On considère les deux fonctions $g(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$ et $h(x)=x^4-x^6$

Pour chacune des fonctions :

a) Déterminer son domaine de définition

b) Étudier sa parité, et en déduire une éventuelle symétrie de sa courbe représentative (on ne demande pas de tracer cette courbe).

3°) Donner l'expression algébrique d 'une fonction, qui ne soit pas une fonction de référence, et qui n'est ni paire, ni impaire.

Exercice 2 : (5 points)

1°) On considère la fonction $f(x)=\dfrac{2x-5}{x-2}$ définie sur $\mathbb{R}$-{2}

a- Prouver que $f(x)=2-\dfrac{1}{x-2}$

b- Étudier les variations de *f* sur $]-\infty;2[$ (tout sera justifié)

2°) Pour tout réel m, on considère la fonction $f_m(x)=\dfrac{mx-5}{x-m}$ définie sur $\mathbb{R}-\{m\}$. (on a donc travaillé dans la question 1°) avec f_2)

Déterminer la valeur de m pour laquelle le point de coordonnées (2;3) appartient à la courbe représentative de f_m .

Exercice 3 : (5 points)

résoudre les équations et inéquations suivantes :

$|7x^2-4|=5$ $\qquad |2x+3|=|7-5x|$ $\qquad |2x-3|\geqslant 2$

Exercice 4 : (5,5 points)

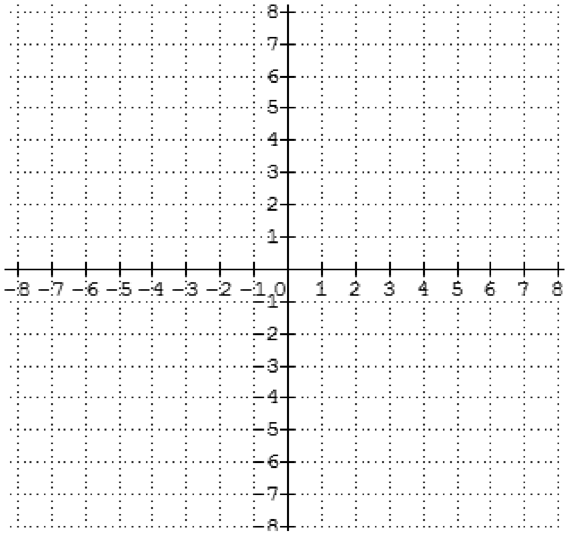
On considère un repère (O,I,J) . On souhaite déterminer tous les points du repère dont les coordonnées $(x;y)$ vérifient l'équation

$$|x+1|+|y-2|=4 \quad \text{(E)}$$

1°) On considère les points A(3;2) ; B(4;1) C (-1;6) $D(-2\sqrt{2};7-\sqrt{8})$

Parmi les points ci-dessus, quels sont ceux dont les coordonnées vérifient l'équation (E) ? Justifier.

2°) Tracer ci-contre la droite d'équation $x=-1$ et la droite d'équation $y=2$



3°) On suppose que $x\geqslant -1$ et $y\geqslant 2$.

a- Écrire alors $|x+1|$ et $|y-2|$ sans valeur absolue (en justifiant), et montrer que dans ce cas l'équation (E) s'écrit $x+y=5$.

b- Tracer la droite (d) d'équation $y=-x+5$ puis passer en rouge l'ensemble des points M de la droite (d), solutions de (E) (ne pas oublier qu'on est dans le cas $x\geqslant -1$ et $y\geqslant 2$.)

4°) Écrire la propriété (E) sans valeur absolue dans chacun des cas suivants, puis tracer l'ensemble des points de coordonnées (x;y) vérifiant l'équation (E) :

a- $x\geqslant -1$ et $y\leqslant 2$;

b- $x\leqslant -1$ et $y\geqslant 2$;

c- $x\leqslant -1$ et $y\leqslant 2$

Exercice 1 :

1°) pour la fonction f : Une unique contrainte : que le nombre sous la racine (ici, $(2x+3)(6-3x)$) soit positif ou nul. Pour étudier le signe d'un produit, on utilise un tableau de signes :

x	$-\infty$		$-1{,}5$		2		$+\infty$
(2x+3)		–	0	+		+	
(6-3x)		+		+	0	–	
(2x+3)(6–3x)		–	0	+	0	–	

On en déduit que D_f =[-1,5;2].

2°) pour la fonction g. Une unique contrainte : il faut que le dénominateur soit différent de 0.

Or $x^2-4=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=2$ ou $x=-2$

Donc $D_g = \mathbb{R}-\{-2;2\}$

De plus, le domaine de définition de *g* est symétrique, donc on peut en étudier la parité :

$g(a)=\dfrac{a^3}{a^2-4}$ et $g(-a)=\dfrac{(-a)^3}{(-a)^2-4}=\dfrac{-a^3}{a^2-4}=-g(a)$

On en déduit que la fonction g est impaire et sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.

→ Pour la fonction h . Aucune contrainte de calcul donc $D_h = \mathbb{R}$

Le domaine de définition est symétrique, on peut étudier la parité de *h* :

$h(x)=x^4-x^6$; $h(-a)=(-a)^4-(-a)^6=a^4-a^6=h(a)$

Comme pour tout *a* on a $h(-a)=h(a)$, on en déduit que cette fonction est paire et que sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Exercice 2 :

1°)

a- $2-\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{2(x-2)-1}{x-2}=\dfrac{2x-5}{x-2}=f(x)$

On a donc bien $f(x)=2-\dfrac{1}{x-2}$

b- Si a et b sont deux éléments de $]-\infty;2[$ tel que a<b, on a :

a<b<2

a-2<b-2<0

$\dfrac{1}{a-2}>\dfrac{1}{b-2}$ (car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^-$)

$-\dfrac{1}{a-2}<-\dfrac{1}{b-2}$ (multiplication par un négatif)

$2-\dfrac{1}{a-2}<2-\dfrac{1}{b-2}$

$f(a)<f(b)$

On en déduit que la fonction f est croissante sur l'intervalle]–∞;2[

2°) Si le point de coordonnées (2;3) appartient à la courbe représentative de f_m , cela signifie que $f_m(2)=3 \Leftrightarrow \dfrac{m\times 2-5}{2-m}=3$

Donc ici on a une valeur interdite : m=2

$\dfrac{m\times 2-5}{2-m}=3 \Leftrightarrow \dfrac{(2m-5)-3(2-m)}{2-m}=0 \Leftrightarrow \dfrac{5m-11}{2-m}=0$

Or $\dfrac{A}{B}=0 \Leftrightarrow$ A=0 et B ≠ 0 ici, on a déjà déterminé la valeur interdite qui est m=2

On résout : 5m-11=0 ⇔ $m=\dfrac{11}{5}=2{,}2$

Donc la valeur de – cherchée est 2,2. C'est la courbe représentative de la fonction $f_{2,2}(x)=\dfrac{2{,}2x-5}{x-2{,}2}$ qui passe par le point de coordonnées (2;3).

Exercice 3 :

$|7x^2-4|=5$

$\Leftrightarrow\ 7x^2-4=5$ ou $7x^2-4=-5$

$\Leftrightarrow\ x^2=\frac{9}{7}$ ou $x^2=\frac{-1}{7}$

$\Leftrightarrow\ x=\frac{3}{\sqrt{7}}$ ou $x=\frac{-3}{\sqrt{7}}$ (l'équation $x^2=-\frac{1}{7}$ n'a pas de solution)

Cette équation a pour ensemble de solutions :

S= { $\frac{3}{\sqrt{7}}$; $-\frac{3}{\sqrt{7}}$ }

$|2x+3|=|7-5x|$

$\Leftrightarrow$ 2x+3=7-5x ou 2x+3=-(7-5x)

7x=4 ou -3x=-10

$x=\frac{4}{7}$ ou $x=\frac{10}{3}$

Cette équation a deux solutions : $\frac{4}{7}$ et $\frac{10}{3}$

$|2x-3|\geqslant 2$

Cette inéquation est équivalente à

$2x-3\geqslant 2$ ou $2x-3\leqslant -2$

$x\geqslant\frac{5}{2}$ ou $x\leqslant\frac{1}{2}$

S=] –∞ ;0,5] ∪ [2,5;+∞[

Exercice 4 : $|x+1|+|y-2|=4$ (E)

1°) Avec les coordonnées de A :

$|3+1|+|2-2|=4+0=4$ donc les coordonnées de A vérifient l'équation.

$|4+1|+|1-2|=5+1=6$ $\neq 4$ donc B ne fait pas partie des points cherchés.

$|-1+1|+|6-2|=0+4=4$ donc C fait partie des points cherchés.

$|-2\sqrt{2}+1|+|7-\sqrt{8}-2|=|-2\sqrt{2}+1|+|5-\sqrt{8}|$

$= 2\sqrt{2}-1+5-\sqrt{8} = 4 +2\sqrt{2}-\sqrt{4}\sqrt{2}$

$= 4+ 2\sqrt{2}-2\sqrt{2}=4$

Donc D fait partie des points cherchés.

3°) a-On suppose que $x\geqslant -1$ donc $x+1\geqslant 0$ et $|x+1|=x+1$

et $y\geqslant 2$ donc $y-2\geqslant 0$ et $|y-2|=y-2$

L'équation $|x+1|+|y-2|=4$ devient alors x+1+y-2=4 $\Leftrightarrow$ x+y=5 $\Leftrightarrow$ y=-x+5

4°)

a- On suppose que $x\geqslant -1$ donc $x+1\geqslant 0$ et $|x+1|=x+1$

et $y\leqslant 2$ donc $y-2\leqslant 0$ et $|y-2|=-y+2$

L'équation $|x+1|+|y-2|=4$ devient alors x+1-y+2=4 $\Leftrightarrow$ x-y=1 $\Leftrightarrow$ y=x-1

b- On suppose que $x\leqslant -1$ donc $x+1\leqslant 0$ et $|x+1|=-x-1$

et $y\geqslant 2$ donc $y-2\geqslant 0$ et $|y-2|=y-2$

L'équation $|x+1|+|y-2|=4$ devient alors -x-1+y-2=4 $\Leftrightarrow$ -x+y=7 $\Leftrightarrow$ y=x+7

c- **O**n suppose que $x\leqslant -1$ donc $x+1\leqslant 0$ et $|x+1|=-x-1$

et $y\leqslant 2$ donc $y-2\leqslant 0$ et $|y-2|=-y+2$

L'équation $|x+1|+|y-2|=4$ devient alors -x-1-y+2=4 $\Leftrightarrow$ -x-y=3 $\Leftrightarrow$ y=-x-3

On obtient l'ensemble des points suivants dont les coordonnées vérifient l'équation :