I- Système de deux équations à deux inconnues

1- Définition

Un système de deux équations à deux inconnues x et y est de la forme

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

où a, b, c et a', b', c' sont des nombres donnés

2- Exemple

$\begin{cases} x+4y=6 \\ x-y=1 \end{cases}$ est un système de 2 équations à deux inconnues

Résoudre un système c'est *trouver* *TOUS les couples* de 2 nombres $(x; y)$ qui vérifient en même temps les deux équations

Pour l'exemple ci-dessus une solution est ***le couple (2 ; 1)*** car on peut constater que :	Par contre le couple (10; -1) n'est pas une solution car :
1ère équation : $2+4\times1=6$ ok	1ère équation : $10+4\times(-1)=10-4=6$ ok
2ème équation : $2-1\times1=1$ ok	2ème équation : $10-1\times(-1)=10+1\neq1$ non

Pour **vérifier** qu'un couple de nombres est solution d'un système il faut faire les vérifications sur les deux équations

Attention l'ordre des deux nombres a une importance !
Par exemple (2 ; 1) est une solution de $2x-3y=1$ alors que (1 ; 2) n'est pas une solution.
Vérification : $2\times2-3\times1=4-3=1\ OK$ alors que $2\times1-3\times2=2-6=-4\ \neq1$

II- Méthodes de résolution

1- La substitution

Cette méthode consiste à isoler une inconnue dans une équation et à la remplacer dans l'autre équation.

Problème : « *Chez le fleuriste M. Gentil achète un bouquet de 5 roses et 3 lys pour sa femme qu'il paye 19 €. Il prend aussi un bouquet de 3 roses et 1 lys pour sa mère qu'il paye 9 €. Combien coûte chaque fleur* ? »

MÉTHODE	RÉDACTION
• Choisir les deux inconnues	Soit x le prix d'une rose et y le prix d'un lys.
• Traduire les informations de l'énoncé	*5 roses et 3 lys coûtent 19 € :* $5x+3y=19$ *3 roses et 1 lys coûtent 9 € :* $3x+y=9$ On doit donc résoudre le système : $\begin{cases} 5x+3y=19 \\ 3x+y=9 \end{cases}$
• Isoler une inconnue dans une équation	Dans l'équation (E_2) on isole y : $y=9-3x$
• Remplacer l'inconnue dans l'autre équation	On remplace y par $9-3x$ dans l'équation (E_1) $5x+3\times(\mathbf{9-3x})=19$ (*distributivité*)
• Résoudre cette nouvelle équation qui n'a plus qu'une inconnue	On résout cette équation : $5x+27-9x=19$ soit *27 – 19 = 4 x donc* $x=8\div4=2$
• Calculer la valeur de l'autre inconnue	$y=9-3x=9-3\times2=9-6=3$
• Conclure	Le couple solution de ce système est (2 ; 3). Une rose coûte 2 € et un lys coûte 3 €.
• On peut vérifier le résultat obtenu	*Vérification* 1er bouquet : $5\times2+3\times3=10+9=19\ OK$ 2ème bouquet : $3\times2+1\times3=6+3=9\ OK$

2- Les combinaisons linéaires

On peut obtenir un nouveau système ayant les mêmes solutions que le système initial en transformant les équations par des COMBINAISONS LINÉAIRES
sommes de deux équations
produit d'une équation par un nombre

Problème : « *Astérix a acheté 3 sangliers et 4 oies. Cela lui a coûté 61 sesterces. Obélix à pris 4 sangliers et 12 oies pour 108 sesterces. Quel est le prix d'un sanglier et celui d'une oie ?* »

MÉTHODE	RÉDACTION
• Choisir les deux inconnues	Soit *x le prix d'un sanglier* et *y celui d'une oie* en sesterces.
• Traduire les informations de l'énoncé	*Les achats d'Astérix :* $3x+4y=61$ *Ceux d'Obélix :* $4x+12y=108$ On doit donc résoudre le système : $\begin{cases} 3x+4y=61 & (E_1) \\ 4x+12y=108 & (E_2) \end{cases}$
• faire apparaître des coefficients identiques sur une inconnue (ou opposés)	$\begin{matrix} 3\times(E_1) \\ (E_2) \end{matrix} \begin{cases} 9x+12y=183 \\ 4x+12y=108 \end{cases}$
• soustraire les deux équations (ou ajouter) afin d'obtenir une seule inconnue	donc $3\times(E_1)-(E_2)$ $5x+0y=183-108$ alors $5x=75$ *donc* $x=75\div5=15$
• déterminer la seconde inconnue	*On remplace x par 15 dans* (E_1) *d'où* $3\times15+4y=61$ ainsi $4y=61-45=16$ *donc* $y=16\div4=4$
• Conclure	Le couple solution de ce système est (15 ; 4). *Un sanglier coûte 15 sesterces et une oie 4 sesterces.*
• Vérifier le résultat obtenu (*facultatif*)	Astérix : $3x+4y=3\times15+4\times4=45+16=61$ *OK* Obélix : $4x+12y=4\times15+12\times4=60+48=108$ *OK*

3- La résolution graphique

On peut représenter un système linéaire en traçant les deux droites associées aux deux équations. La solution du système est :
le couple des coordonnées du point d'intersection des deux droites

Exemple : *le système* $\begin{cases} 2x+y=5 \\ -3x+y=-5 \end{cases}$ *est équivalent à* $\begin{cases} y=-2x+5 \\ y=3x-5 \end{cases}$

On peut donc tracer les deux droites associées à ces équations. Ce sont les représentations des fonctions affines définies par :

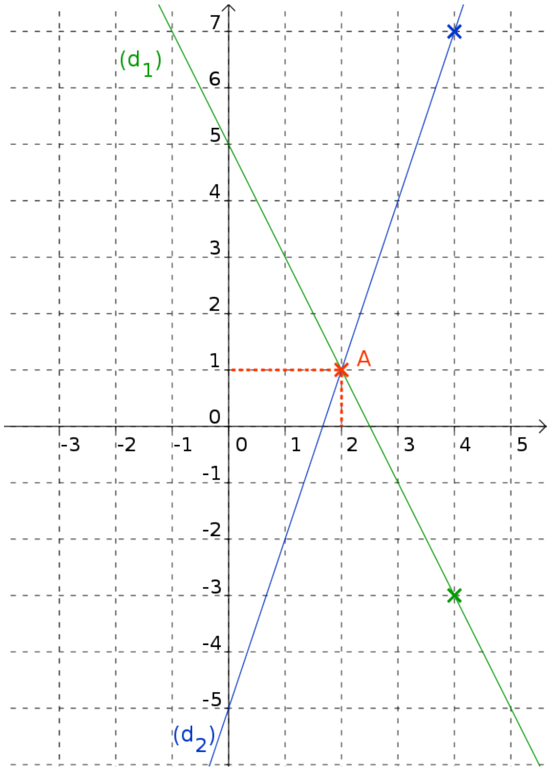
f(x) = -2x + 5 et *g(x) = 3x – 5*

x	0	4
f(x) = -2x + 5	5	-3

On trace la droite (d_1) *qui représente la fonction f*

x	0	4
g(x) = 3x – 5	-5	7

On trace la droite (d2) qui représente la fonction g



Les coordonnées du point d'intersection des deux droites forment le couple solution du système.
Le couple (2 ; 1) est la solution du système
$\begin{cases} 2x+y=5 \\ -3x+y=-5 \end{cases}$

Vérification : $\begin{cases} 2\times2+1=5 & ok \\ -3\times2+1=-6+1=-5 & ok \end{cases}$