

**Jeux d'eau au parc du château de Versailles
Réseau hydraulique**

Partie A : Comment garantir la hauteur d'un jet d'eau

A.1. Hauteur du jet d'eau

A.1.1. Energie cinétique au point A : $E_{cA} = \frac{1}{2} m \cdot v_A^2$.

A.1.2. Energie cinétique au point B : $E_{cB} = \frac{1}{2} m \cdot v_B^2 = 0$ car $v_B = 0$.

A.1.3. Energie potentielle au point A : l'énoncé nous donne la réponse : $E_{pA} = 0$.

A.1.4. Energie potentielle au point B : $E_{pB} = m \cdot g \cdot h_j$.

A.1.5. Principe de conservation de l'énergie mécanique :

$$E_{mA} = E_{mB} \Rightarrow E_{cA} + E_{pA} = E_{cB} + E_{pB} \Rightarrow \frac{1}{2} m \cdot v_A^2 + 0 = 0 + m \cdot g \cdot h_j$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} v_A^2 = g \cdot h_j$$

La hauteur h_j du jet est donc : $h_j = \frac{v_A^2}{2g} = \frac{17,4^2}{2 \times 9,81}$ soit $h_j \approx 15,4 \text{ m}$.

A.1.6. On a négligé les pertes de charge, la hauteur réelle sera inférieure à 15,4m.

A.2. Etude de l'alimentation du jet d'eau

A.2.1. En régime statique, on a : $p_C - p_v + \rho \cdot g \cdot H_v = 0$

$$\Rightarrow p_v = p_C + \rho \cdot g \cdot H_v \Rightarrow p_v = 1,013 \cdot 10^5 + 1000 \times 9,81 \times 18 \text{ soit } p_a \approx 2,78 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

A.2.2.1 La grandeur **p** représente la **pression**.

A.2.2.2 La pression au point C est la pression atmosphérique : $p_C = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

A.2.2.3 La pression au point A est aussi la pression atmosphérique : $p_A = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

A.2.2.4 La grandeur **z** est la **hauteur** d'un point.

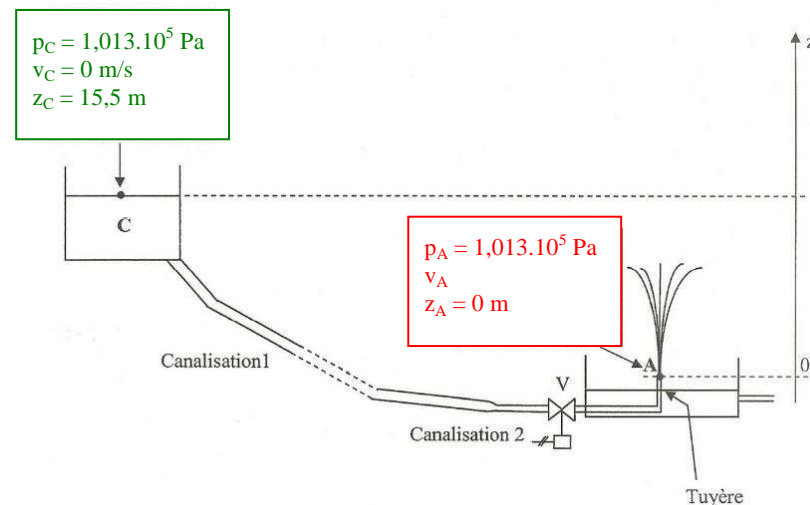
A.2.2.5 La hauteur z_A du point A est nulle (hauteur de référence) : $z_A = 0 \text{ m}$.

A.2.2.6 L'énoncé nous donne directement : $z_C = 15,5 \text{ m}$.

A.2.2.7 La grandeur **v** est la **vitesse** d'écoulement du fluide en un point.

A.2.2.8 L'énoncé nous donne directement : $v_C = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Les grandeurs p, v et z sont indiquées sur le document réponse ci-dessous :



A.2.2.9. L'équation de Bernoulli est : $\frac{p_C - p_A}{\rho} + g(z_C - z_A) + \frac{v_C^2 - v_A^2}{2} = 0$

et elle devient : $\frac{0}{\rho} + g \cdot H + \frac{-v_A^2}{2} = 0$ soit $v_A = \sqrt{2 \cdot g \cdot H} = \sqrt{2 \times 9,81 \times 15,5}$

soit $v_A \approx 17,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (valeur confirmée à la question A.1.5.).

A.2.2.10. Le débit au point A est $Q_A = S \cdot v_A = \pi \cdot \left(\frac{d_A}{2}\right)^2 \cdot v_A = \pi \times 0,055^2 \times 17,4$

soit $Q_A \approx 0,165 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

A.2.2.11. La **grandeur qui se conserve** tout le long du circuit hydraulique est le **débit**.

A.2.2.12. la relation générale est : $v = \frac{Q}{\pi \cdot (d/2)^2}$, ce qui donne :

$$\blacksquare v_1 = \frac{Q}{\pi \cdot (d_1/2)^2} = \frac{0,165}{\pi \times 0,45^2} \text{ soit } \boxed{v_1 \approx 0,26 \text{ m.s}^{-1}}$$

$$\blacksquare v_2 = \frac{Q}{\pi \cdot (d_2/2)^2} = \frac{0,165}{\pi \times 0,25^2} \text{ soit } \boxed{v_2 \approx 0,84 \text{ m.s}^{-1}}$$

A.2.3.1 L'équation de Bernoulli devient : $g \cdot H + \frac{-v_A^2}{2} = J$

$$v_A = \sqrt{2 \cdot (g \cdot H - J)} = \sqrt{2 \times (9,81 \times 15,5 - 17,8)} \text{ soit } \boxed{v_A \approx 16,4 \text{ m.s}^{-1}}$$

A.2.3.2 La perte de hauteur d'eau z_j correspondante à la perte de charge J est :

$$g \cdot z_j = J \text{ soit } z_j = \frac{J}{g} = \frac{17,8}{9,81} \text{ soit } \boxed{z_j \approx 1,8 \text{ m}}$$

A.3. Retour sur l'enjeu

A.3.1. Le volume d'eau V_{mb} utilisé en 1h30 est : $\boxed{V_{mb} = 1,5 \times 2500 = 3750 \text{ m}^3}$.

A.3.2. La diminution ΔH du niveau d'eau dans le réservoir est :

$$\Delta H = \frac{V_{mb}}{S_{mb}} = \frac{3750}{16000} \text{ soit } \boxed{\Delta H \approx 0,23 \text{ m}}$$

Une diminution importante du niveau d'eau dans le réservoir entraînerait une diminution de la hauteur H et donc une diminution de la vitesse v_A .

Partie B : Solution pour maintenir un niveau constant

B.1. Dimensionnement du servomoteur

B.1.1. Vitesse de translation de la vanne : $v_v = \frac{d_v}{\Delta t} = \frac{23 \cdot 10^{-3}}{138} \text{ soit } \boxed{v_v \approx 167 \cdot 10^{-6} \text{ m.s}^{-1}}$.

B.1.2. Nombre total de tours : $N_{br} = \frac{d_v}{p} = \frac{23}{4} \text{ soit } \boxed{N_{br} = 5,75 \text{ tr}}$.

B.1.3. Vitesse de rotation : $n_{sv} = \frac{N_{br}}{\Delta t} \times 60 = \frac{d_v}{p \cdot \Delta t} \times 60 \text{ soit } \boxed{n_{sv} = \frac{v_v}{p} \times 60}$.

L'application numérique donne : $n_{sv} = \frac{167 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 10^{-3}} \text{ soit } \boxed{n_{sv} \approx 2,5 \text{ tr.min}^{-1}}$.

B.1.4. Notons Ω_{sv} la vitesse angulaire de rotation : $\Omega_{sv} = \frac{2\pi \cdot n_{sv}}{60} = \frac{2\pi \times 2,5}{60} \approx 0,262 \text{ rad/s}$

Exprimons maintenant le bilan des puissance "réducteur - vanne" :

$$P_{reduc} \times \eta_v = P_{vanne} \Rightarrow C_{sv} \cdot \Omega_{sv} \cdot \eta_v = F \cdot v_v \Rightarrow C_{sv} = \frac{F \cdot v_v}{\Omega_{sv} \cdot \eta_v} = \frac{20 \cdot 10^3 \times 167 \cdot 10^{-6}}{0,262 \times 0,26}$$

soit $\boxed{C_{sv} \approx 49 \text{ N.m}}$.

B.1.5. On a $r = \frac{n}{n_{sv}} \Rightarrow n = n_{sv} \cdot r = 2,5 \times 560 \text{ soit } \boxed{n \approx 1400 \text{ tr/min}}$.

B.1.6. Exprimons le bilan des puissances à "entrée-sortie du réducteur" :

$$C_{MAS} \cdot \Omega = \frac{C_{sv} \cdot \Omega_{sv}}{\eta_{red}} \Rightarrow C_{MAS} = \frac{C_{sv}}{\eta_{red}} \cdot \frac{\Omega_{sv}}{\Omega} = \frac{C_{sv}}{\eta_{red}} \cdot \frac{n_{sv}}{n} \approx \frac{49}{0,22} \times \frac{2,5}{1400}$$

soit $\boxed{C_{MAS} \approx 0,40 \text{ N.m}}$.

B.1.7. Puissance utile du moteur : $P_u = C_{MAS} \cdot \Omega \approx 0,4 \times \frac{2\pi \times 1400}{60} \text{ soit } \boxed{P_u \approx 59 \text{ W}}$.

B.2. Caractéristiques de la machine asynchrone triphasée

B.2.1. Vitesse de synchronisme : $n_s = \frac{60 \times f}{p} = \frac{60 \times 50}{2} \text{ soit } n_s = 1500 \text{ tr/min}$

Glissement : $g_n = \frac{n_s - n_n}{n_s} = \frac{1500 - 1400}{1500} \text{ soit } \boxed{g_n \approx 6,67 \%}$.

B.2.2. Pour permettre la rotation dans les deux sens, on peut prévoir un inverseur de phase.

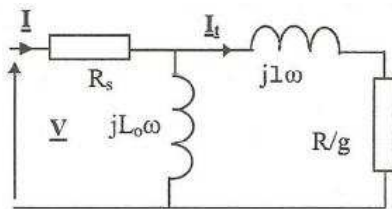
B.2.3. On a : $P_{un} = C_{MAS} \cdot \Omega_n \Rightarrow C_{MAS} = \frac{P_{un}}{\Omega_n} = \frac{60}{\frac{2\pi \times 1400}{60}} \text{ soit } \boxed{C_{MAS} \approx 0,41 \text{ N.m}}$.

B.2.4. Puissance active : $P_a = \sqrt{3}U_n I_n \cos \varphi = \sqrt{3} \times 400 \times 0,3 \times 0,8$ soit $P_a \approx 166 \text{ W}$.

Puissance réactive : $Q_a = P_a \tan \varphi \approx 166 \times \tan(\cos^{-1} 0,8)$ soit $Q_a \approx 125 \text{ VAR}$.

B.2.5. Rendement : $\eta = \frac{P_{un}}{P_a} \approx \frac{60}{166}$ soit $\eta \approx 36\%$.

B.2.6.



- R_s : résistance des enroulements statoriques.
- $L_0\omega$: réactance de magnétisation.
- $j\omega$: réactance de fuites magnétiques (rotor + stator) ramenées au stator.
- R : résistance rotorique.

B.2.7. Au démarrage, la vitesse est nulle donc le glissement g_d est : $g_d = 1$.

B.2.8.1. L'inductance l est en série avec R/g donc l'impédance équivalente est :

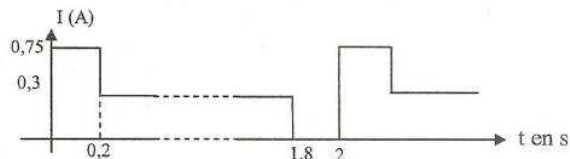
$$\underline{Z} = R/g + j\omega = 145 + j267 (\Omega) \text{ en rappelant que } g=1 \text{ (démarrage).}$$

B.2.8.2. La résistance R_s se retrouve en série avec l'impédance \underline{Z}_e , on a donc

$$\underline{Z}_{eT} = R_s + \underline{Z}_e = 118 + 96,6 + j229 \text{ soit } \underline{Z}_{eT} = 214,6 + j229.$$

B.2.8.3. Courant de démarrage : $I_d = \frac{V}{Z_{eT}} = \frac{230}{\sqrt{214,6^2 + 229^2}}$ soit $I_d \approx 0,733 \text{ A}$.

B.2.9. La figure ci-dessous donnée dans l'énoncé représente déjà les différentes valeurs efficaces I . Pour avoir la valeur efficace équivalente I_{eq} , il suffit de calculer la valeur moyenne des valeurs efficaces I sur un cycle.



On a donc : $I_{eq} = \frac{0,75 \times 0,2 + 0,3 \times (1,8 - 0,2)}{2}$ soit $I_{eq} = 0,315 \text{ A}$.

B.2.10. La valeur efficace équivalente I_{eq} est très proche du courant nominal efficace I_n . Le moteur ne devrait donc pas subir d'échauffement excessif.

B.2.11. Nombre de démarrages par heure : $N_{dh} = \frac{3600}{2} = 1800 \text{ dém/h}$.

B.3 Régulation de niveau

B.3.1 On a $V = S_R \cdot N$ et S_R est constant donc $dV = S_R \cdot dN$.

B.3.2 Phrase clé : "le **débit global** est responsable de la **variation de volume**".

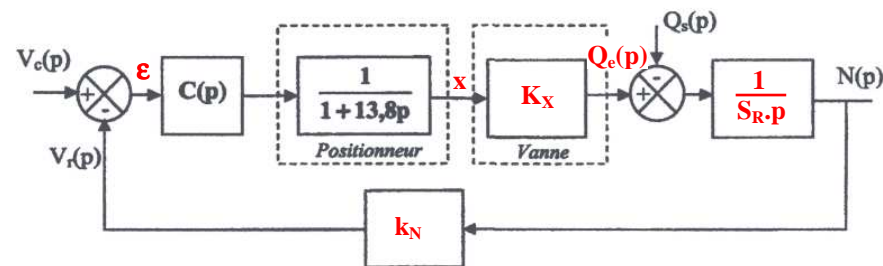
Ce qui donne en équation : $Q_e - Q_s = \frac{dV}{dt}$ soit $Q_e - Q_s = S_R \frac{dN}{dt}$.

B.3.3 Le passage à la transformation de Laplace de l'équation précédente donne :

$$Q_e(p) - Q_s(p) = S_R \cdot pN(p) \text{ (la "dérivée" de transforme en "multiplication par p").}$$

Exprimons le rapport $\frac{\text{sortie}}{\text{entrée}}$: $\frac{N(p)}{Q_e(p) - Q_s(p)} = \frac{1}{S_R \cdot p}$ (expression utile pour la suite).

B.3.4 Le schéma complété de l'asservissement est représenté ci-dessous :



B.3.3 En régime statique, le niveau devient constant donc le débit de remplissage est égal au débit de vidage : $Q_e = Q_s$.

B.3.4.1 En régime statique on a $Q_s = 0,1 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ donc $Q_e = Q_s = 0,1 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

B.3.4.2 On a $Q_e = K_x \cdot x$ donc $x = \frac{Q_e}{K_x} = \frac{0,1}{1,6 \cdot 10^{-3}}$ soit $x = 62,5 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

B.3.4.3 On est en régime statique, la transmittance du positionneur se réduit à 1 donc la sortie du correcteur C(p) prend la valeur $x = 62,5$ (position de la vanne).

On a $C(p) = 0,1$ donc $V_c(p) - V_r(p) = \frac{x}{0,1} = \frac{62,5}{0,1}$ soit $V_c(p) - V_r(p) = 625$.

B.3.4.4 On a $V_r = K_N \cdot N = 1000 \cdot N \Rightarrow N = \frac{V_r}{1000} \Rightarrow N_c - N = \frac{V_c - V_r}{1000} = \frac{625}{1000}$
soit $N_c - N = 0,625$.

Pour résumer, il y a un rapport "×1000" entre la consigne (nombre réel) et le niveau d'eau (en mètre).

B.3.4.5 Pour avoir une erreur statique nulle, il faut insérer un terme en $\frac{1}{p}$ dans la chaîne directe. On pourra placer ce terme dans le correcteur C(p) (action intégrale du correcteur).

B.3.5.1 Pour avoir une stabilité suffisante, la marge de phase doit être au moins de 45° .

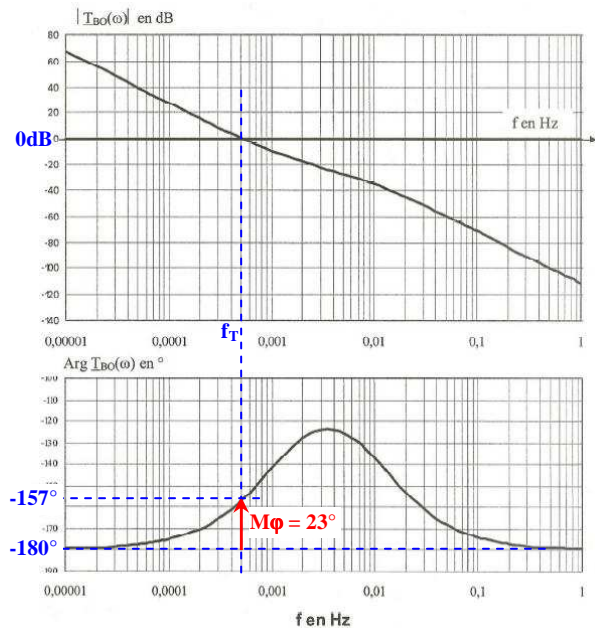
B.3.5.2 La méthode de mesure de la marge de phase est la suivante :

- on repère la fréquence f_T pour laquelle $|T_{BO}(f)| = 0\text{dB}$ soit $f_T \approx 0,0005\text{ Hz}$

- sur la courbe de phase on mesure l'écart : $M\phi = |-180 - \text{Arg}(T_{BO}(f_T))|$

On mesure donc la marge de phase $M\phi \approx 180 - 157$ soit $M\phi \approx 23^\circ$.

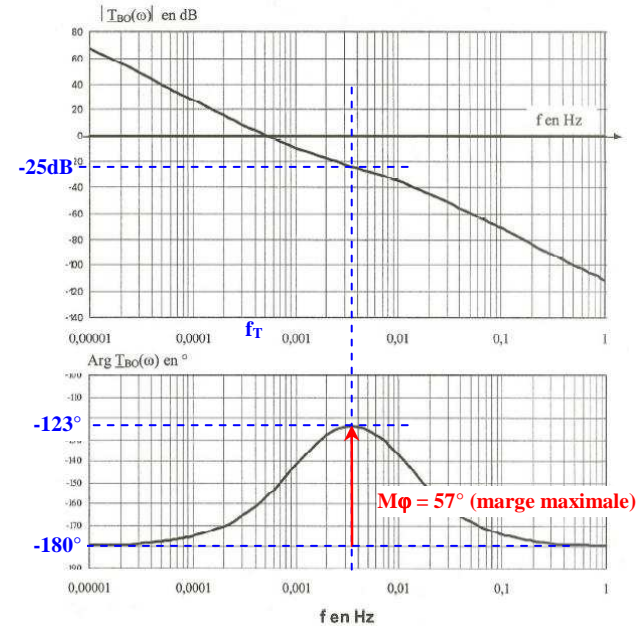
Le schéma ci-dessous illustre la méthode de mesure de la marge de phase :



B.3.5.3 Pour que la marge de phase soit maximale, il faut que f_T' soit placée à l'endroit où la phase $\text{Arg}(T_{BO}(f_T'))$ est minimale. Il faut donc que la courbe de Gain coupe l'axe "0dB" lorsque la phase est minimale.

On remarque que la phase est minimale (-123°) pour $f_T' \approx 0,034\text{ Hz}$ et $G \approx -25\text{ dB}$ (schéma ci-dessous).

Il faut donc "rajouter" +25dB au correcteur soit $20\log A = 25 \Rightarrow A = 10^{\frac{25}{20}}$
soit $A \approx 17,8$.



B.3.5.4 La nouvelle marge de phase sera donc $M\phi' \approx 180 - 123$ soit $M\phi' \approx 57^\circ$.

Le système ne va maintenant présenter que peu d'oscillations sur la réponse indicielle.

B.3.5.5 L'exploitation de la réponse indicielle nous donne :

- $N(\infty) = N_c$ donc pour l'erreur statique : $N_c - N(\infty) = 0$.

- Le temps de réponse $t_{r5\%}$ est le temps que met la sortie pour **atteindre et rester entre 95% et 105% de la valeur finale**.

On mesure directement $t_{r5\%} \approx 350\text{ s}$.

- Dépassement : $D\% = \frac{N_{\max} - N_c}{N_c} \times 100 = \frac{1,22N_c - N_c}{N_c} \times 100$ soit $D\% = 22\%$.